INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE 2003

Epréuve de Mathématique I

Durée 3 heures

Rappels et notations

On rappelle qu'une fonction réelle f est dite convexe sur un intervalle I si elle vérifie

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in]0, 1[,\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

et que, pour toute fonction f convexe sur I et tout élément fixé x_0 de I, la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

On rappelle également que la fonction $\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ est définie sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Dans tout le problème, φ désigne une fonction définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles.

Pour une fonction φ donnée, on dira qu'une fonction f, définie sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, est solution de l'équation (E_φ) si on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$$

L'objet du problème est la recherche de fonctions convexes solutions de certaines équations (E_φ).

Les deux premières parties du problème sont entièrement indépendantes. La fin de la troisième partie utilise les résultats des deux premières.

Partie 1

1) On note f_0 la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f_0(x) = \int_0^x [t]\, dt$$

où $[t]$ désigne la partie entière de t.

a) Montrer que f_0 est continue sur $]0, +\infty[$ et admet en tout point x de cet intervalle une dérivée à gauche et une dérivée à droite, que l'on explicitera.

b) Montrer que f_0 est l'unique solution de l'équation (E_{ϕ_0}), nulle sur l'intervalle $]0,1[$, pour une fonction ϕ_0 que l'on précisera.

c) Montrer que l'équation (E_{ϕ_0}) admet une infinité de solutions prenant une valeur donnée au point 1.

2) Pour tout nombre entier strictement positif n et tout élément t de l'intervalle $[0,1[$, on pose :

$$h_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{1}{n} \\ 1 + n(t-1) & \text{si} \quad 1 - \dfrac{1}{n} < t < 1 \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction $g_n : t \longrightarrow \lfloor t \rfloor - h_n(t - \lfloor t \rfloor)$ est continue sur $]0,+\infty[$

b) Quelle est la limite simple de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? La convergence de cette suite est-elle uniforme sur $]0,+\infty[$?

c) Montrer que la fonction $f_n : x \longrightarrow \displaystyle\int_0^x g_n(t)\,dt$ est convexe sur $]0,+\infty[$.

d) Quelle est la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? La convergence de cette suite est-elle uniforme sur $]0,+\infty[$?

e) Montrer que l'équation (E_{ϕ_0}) admet une infinité de solutions convexes sur $]0,+\infty[$ qui s'annulent en 1.

3) On suppose dans cette question que l'équation (E_ϕ) admet une solution f convexe sur $]0,+\infty[$

a) Montrer que ϕ est alors nécessairement croissante

b) Etablir, pour tout réel x strictement positif et tout nombre entier n supérieur à x, les inégalités :

$$x\,\phi(n) \leqslant f(x) - f(1) + \phi(x) + \sum_{k=1}^{n} \Big(\phi(x+k) - \phi(k)\Big) \leqslant x\,\phi(x+n+1)$$

c) En déduire que, si ϕ est dérivable et si sa dérivée tend vers 0 en $+\infty$, l'équation (E_ϕ) admet une unique solution convexe sur $]0,+\infty[$ prenant une valeur donnée au point 1.

Partie 2

1) a) Montrer que, pour tout réel strictement positif x, la fonction $t \longrightarrow \dfrac{e^{-t}}{t} - \dfrac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$

b) Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad F(x) = \text{_____}$$

Montrer que F est monotone et trouver sa limite à droite en 0.

2) a) Montrer que, pour tout réel strictement positif x, on a :

$$F(x) = F(1) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}\right)$$

b) Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

c) F est-elle intégrable sur $]0,1]$?

3) a) Etablir, pour tout réel strictement positif x, l'égalité

$$\ln(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\, dt$$

b) En déduire que, lorsque x tend vers $+\infty$, on a

$$F(x) = \ln(x) - o(1)$$

4) a) Démontrer que :

$$\forall z \in]0, -\infty[,\ F(z+1) - F(x) = \frac{1}{x}$$

b) Montrer que $F(1)$ est égal à $-\gamma$, où γ désigne la constante d'Euler, définie par

$$\gamma = \sum \frac{1}{\cdot}$$

Partie 3

1) On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles strictement positives est ℓ-convexe si elle est de classe C^2 sur I et si, pour tout réel t et tout élément x de I, on a l'inégalité :

$$t^2 f''(x) - 2t f'(x) + f(x) \geq 0$$

a) Montrer que la somme de deux fonctions C-convexes sur un intervalle I est ℓ-convexe sur I

b) Montrer que si une fonction f est ℓ-convexe sur I la fonction composée $\ln \circ f$ est convexe sur I

2) Soit $J = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non vide et non reduit à un point On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de J dans $\mathbb{R}$ et $\| \ \|_\infty$ la norme sur E définie par

$$\forall f \in E, \| f \|_\infty = \sup\{ |f(x)| :\ x \in J\}$$

On note C_1 l'ensemble des éléments de E qui sont des fonctions convexes et C_2 l'ensemble des éléments de C **qui** sont des fonctions de classe C^2

Comparer les quatre ensembles C, $\overline{C}$ (adhérence de C dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_\infty)$, C_2 et $\overline{C_2}$

3) Pour tout couple (N, n) de nombres entiers strictement positifs et tout réel x, on pose :

$$f_{N,n}(x) = \frac{N^2 - 1}{nN} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{N} + \frac{k(N^2-1)}{nN} \right)^{x-1} \exp\left(-\left(\frac{1}{N} + \frac{k(N^2-1)}{nN} \right) \right) \right)$$

a) Montrer que les fonctions $f_{N,n}$ sont ℓ-convexes sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que la fonction composée $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur $]0, +\infty[$

4) a) Montrer que, pour tout réel strictement positif x on a

$$\Gamma(x) = \exp\left(\int_1^x F(t)\, dt \right)$$

où la fonction F a été définie dans la deuxième partie.

b) En déduire l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}\, dt = -\gamma$$